Preuve

- Supposons la fonction f dérivable en a

ce qui signifie que la limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un nombre réel, noté $f'(a)$.

Pour x réel au voisinage de a, distinct de a, posons

$$u(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a).$$

On a

$$\lim_{x \to a} u(x)=0$$

et pour x réel au voisinage de a, distinct de a,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)+u(x)$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)\times(x-a)+u(x)\times(x-a) \quad (*).$$

Cette formule reste valable pour tout réel x au voisinage de a en posant $u(a)=0$.

- Supposons la fonction g dérivable en $b=f(a)$.

ce qui signifie que la limite $\lim\limits_{y\to b}\dfrac{g(y)-g(b)}{y-b}$ est un nombre réel, noté $g'(b)$.

Pour y réel au voisinage de b, distinct de b, posons

$$v(y)=\frac{g(y)-g(b)}{y-b}-g'(b).$$

On a

$$\lim_{y\to b} v(y)=0$$

et pour y réel au voisinage de b, distinct de b,

$$\frac{g(y)-g(b)}{y-b}=g'(b)+v(y)$$

$$g(y)=g(b)+g'(b)\times(y-b)+v(y)\times(y-b) \quad (**).$$

Cette formule reste valable pour tout réel y au voisinage de b en posant $v(b)=0$.

• Etudions la dérivabilité en a de la fonction $g \circ f$, c'est-à-dire étudions la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a}.$$

Pour x au voisinage de a, posons $y = f(x)$.

La fonction f étant dérivable en a, elle est continue en a, soit

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = b,$$

de telle sorte que $y = f(x)$ est au voisinage de b.

Par suite, pour x au voisinage de a,

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(y) \quad \text{avec} \quad y = f(x) \text{ qui est au voisinage} \\ &= g(b) + g'(b) \times (y - b) + v(y) \times (y - b) \quad (**) \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} y - b &= f(x) - f(a) \\ &= f'(a) \times (x - a) + u(x) \times (x - a) \quad (*) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour x au voisinage de a,

$$\begin{aligned} & g \circ f(x) - g \circ f(a) \\ &= g(f(x)) - g(b) \\ &= g'(b) \times (y - b) + v(y) \times (y - b) \end{aligned}$$

$$=g'(b)\times f'(a)\times(x-a)$$

$$+g'(b)\times u(x)\times(x-a)$$

$$+v(y)\times f'(a)\times(x-a)+v(y)\times u(x)\times(x-a).$$

Ainsi, pour x au voisinage de a et distinct de a,

$$\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a}=f'(a)\times g'(b)+w(x)$$

avec

$$w(x)=g'(b)\times u(x)+f'(a)\times v(y)+u(x)\times v(y).$$

Or, lorsque x tend vers a,

$$y=f(x) \text{ tend vers } f(a)=b$$

et puisque

$$\lim_{x\to a} u(x)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to b} v(y)=0$$

on obtient

$$\lim_{x\to a} w(x)=0$$

puis

$$\lim_{x\to a}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a}=f'(a)\times g'(b)$$

$$=f'(a)\times g'(f(a)).$$